ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}$, $\alpha \in (0,1)\bigcup(1,+\infty)$

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5}$.

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Η μονοτονία της εκθετικής συνάρτησης $y = \alpha^x$ εξαρτάται από την βάση του θετικού αριθμού α.

Έχουμε,

$$\alpha^{38} < \alpha^{24} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha^{38}}{\alpha^{24}} < \frac{\alpha^{24}}{\alpha^{24}} \Leftrightarrow \alpha^{14} < 1 \Leftrightarrow \sqrt[14]{\alpha^{14}} < \sqrt[14]{1} \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha < 1$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Έχουμε,

$$2^{x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+5} \Leftrightarrow 2^{x-1} < \left(2^{-1}\right)^{(3x+5)} \Leftrightarrow 2^{x-1} < 2^{-(3x+5)} \underset{\text{γν. αύξουσα}}{\overset{y=2^x}{\Leftrightarrow}} x-1 < -3x-5 \Leftrightarrow x < -1$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -5$ και $\beta = -7$.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y′y.

Μονάδες 4

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x - 31) < 3$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$, θα έχουμε:

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 2 + \beta = 3 \\ \alpha \cdot 2^2 + \beta = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + \beta = 13 \end{cases} \overset{-}{\Rightarrow} 2\alpha = 10 \Leftrightarrow \alpha = 5$$

Άρα

$$2 \cdot 5 + \beta = 3 \Leftrightarrow \beta = -7$$

β) Το σημείο αυτό θα έχει τετμημένη μηδέν, άρα τεταγμένη $f(0)=\alpha+\beta=5-7=-2$, οπότε θα είναι το $(0,-2)$.

γ) Η συνάρτηση $g(x)=\alpha^x$ είναι γνησίως αύξουσα για $\alpha>1$. Έτσι, για κάθε $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$, είναι

$$2^{x_1}<2^{x_1}\Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2}\Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

δ) Αφού $f(1)=3$, έχουμε:

$$f(2^x-31)<3\Leftrightarrow f(2^x-31)<f(1)\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}2^x-31<1\Leftrightarrow 2^x<32\Leftrightarrow 2^x<2^5\overset{2>1}{\Leftrightarrow}x<5$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6,\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x+1$ και η αριθμητική τιμή του για $x=2$ να είναι ίση με 12.

Μονάδες 7

β) Για $\alpha=-2$ και $\beta=-3$

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-2$.

Μονάδες 5

ii.Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<-x+14$

Μονάδες 7

iii. Να λύσετε την ανίσωση $P(\ln x)<-\ln x+14$.

Μονάδες 6

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}P(-1)=0\\P(2)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+\alpha-\beta+6=0\\8+4\alpha+2\beta+6=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=-5\\4\alpha+2\beta=-2\ \ :2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha-\beta=-5\\2\alpha+\beta=-1\end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}3\alpha=-6\Leftrightarrow\alpha=-2$$

και συνεπώς

$$-2-\beta=-5\Leftrightarrow-\beta=-3\Leftrightarrow\beta=3$$

β) i) Είναι:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -2x^2 & +3x & +6 & x-2\\
\cline{5-5}
-x^3 & +2x^2 & & & x^2+3\\
\cline{1-4}
 & 0 & +3x & +6 & \\
 & & -3x & +6 & \\
\cline{3-4}
 & & & +12 &
\end{array}$$

$$P(x)=(x-2)(x^2+3)+12$$

ii) $P(x)<-x+14 \Leftrightarrow x^3-2x^2+3x+6<-x+14 \Leftrightarrow x^3-2x^2+4x-8<0 \Leftrightarrow$

$$x^2(x-2)+4(x-2)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2+4)<0 \overset{x^2+4>0}{\Leftrightarrow} x-2<0 \Leftrightarrow x<2.$$

iii) Θέτοντας όπου $\ln x$ το y, η ανίσωση γίνεται $P(y)<-y+14$, η οποία, από το ερώτημα (ii) έχει λύση $y<2$. Επομένως,

$$\ln x<2 \Leftrightarrow \ln x<2\cdot 1 \Leftrightarrow \ln x<2\ln e \Leftrightarrow \ln x<\ln e^2 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} x<e^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x$

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\ln\left(x^2-8\right)\geq \ln 7x$

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει:

$$x^2-8>0 \Leftrightarrow x^2>8 \Leftrightarrow |x|>2\sqrt{2} \Leftrightarrow x>2\sqrt{2} \text{ ή } x<-2\sqrt{2}$$

και $$7x>0 \Leftrightarrow x>0$$

Συναληθεύοντας τις δύο παραπάνω ανισώσεις προκύπτει: $\boxed{x>2\sqrt{2}}$ (1)

Η εξίσωση:

$$\ln\left(x^2-8\right)=\ln 7x \Leftrightarrow x^2-8=7x$$
$$\Leftrightarrow x^2-7x-8=0$$
$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=8$$

Από τις δύο λύσεις δεκτή η $\boxed{x=8}$ λόγω του περιορισμού (1)

β) $$\ln\left(x^2-8\right)\geq \ln 7x \Leftrightarrow x^2-8\geq 7x \Leftrightarrow \boxed{x^2-7x-8\geq 0}$$

x	$-\infty$		-1		8		$+\infty$
x^2-7x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $$x\leq -1 \text{ ή } x\geq 8$$

Όμως λόγω της (1) η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x\geq 8$

ΑΣΚΗΣΗ 5

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση

$$A = \ln x + \ln(x+6)$$

Μονάδες 10

β) Να λύσετε την εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49).$$

Μονάδες 15

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε πως η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \ln x$ ορίζεται, όταν $x > 0$

Έτσι, λοιπόν, η παράσταση $A = \ln x + \ln(x+6)$ ορίζεται όταν

$$\left.\begin{array}{c} x > 0 \\ \text{και} \\ x+6 > 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x > 0 \\ \text{και} \\ x > -6 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > 0$$

Οπότε η παράσταση A ορίζεται όταν $x > 0$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η εξίσωση

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49)$$

θα λυθεί για $x > 0$

Χρησιμοποιώντας γνωστές ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\ln(49) = \frac{1}{2}\ln\left(7^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\ln(7) = \ln(7)$$

και

$$\ln x + \ln(x+6) = \ln\left(x\cdot(x+6)\right) = \ln\left(x^2+6x\right)$$

Άρα, για $x > 0$ έχουμε:

$$\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln(49) \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(x^2+6x\right) = \ln(7) \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x = 7 \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x-7 = 0$$

Το τριώνυμο x^2+6x-7 έχει διακρίνουσα $\Delta = 64 > 0$ και ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2} = \begin{cases} \dfrac{-6+8}{2} = 1 \\ \dfrac{-6-8}{2} = -7 \end{cases}$$

Άρα

$$x = 1 \text{ ή } x = -7$$

Όμως, λόγω του περιορισμού $x > 0$, προκύπτει τελικά ότι $x = 1$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e\right)-1$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Γνωρίζουμε πως η λογαριθμική συνάρτηση $g(x)=\ln x$ ορίζεται, όταν $x>0$

Έτσι, λοιπόν, η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^{2x}-e\right)-1$ ορίζεται όταν

$$e^{2x}-e>0 \Leftrightarrow e^{2x}>e \Leftrightarrow e^{2x}>e^{1} \overset{e>1}{\Leftrightarrow} 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

β) Από το προηγούμενο ερώτημα, προκύπτει ότι η εξίσωση $f(x)=0$ θα λυθεί για $x>\frac{1}{2}$.

Έχουμε,

$$f(x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^{2x}-e\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^{2x}-e\right)=1 \overset{1=\ln e}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln\left(e^{2x}-e\right)=\ln e \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-e=e \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}=2e \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^{2x}\right)=\ln(2e) \Leftrightarrow$$

$$2x=\ln(2e) \Leftrightarrow$$

$$x=\frac{\ln(2e)}{2}$$

Για να είναι δεκτή αυτή η λύση, θα πρέπει

$$\frac{\ln(2e)}{2}>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\ln(2e)>1 \overset{1=\ln e}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(2e)>\ln e \Leftrightarrow$$

$2e>e$, το οποίο ισχύει.

Συμπέρασμα:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\ln(2e)}{2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2+4)$ και $g(x)=\ln x+\ln 4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

Μονάδες 12

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α)

● Για την f:

Πρέπει $x^2+4>0$ που ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, άρα πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.

● Για την g:

Πρέπει $x>0$, άρα πεδίο ορισμού της g είναι το $B=(0,+\infty)$.

β) Για $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow \ln(x^2+4)=\ln x+\ln 4\Leftrightarrow$$
$$\ln(x^2+4)=\ln 4x\Leftrightarrow x^2+4=4x\Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2,$$

που είναι δεκτή.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτηση f.

Μονάδες 13

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0 .

Μονάδες 12

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq -1 \text{ και}$$
$$3-\sqrt{x+1}>0\Leftrightarrow \sqrt{x+1}<3\Leftrightarrow x+1<9\Leftrightarrow x<8$$

Άρα πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=[-1,8)$

β) Έχουμε:

$$f(x)=0\Leftrightarrow \ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)=0\Leftrightarrow 3-\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow x+1=4\Leftrightarrow x=3,$$

που είναι δεκτή.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(e^x-1)$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

Μονάδες 4

β) Να λύσετε τις ανισώσεις $f(x)>0$ και $g(x)<0$.

Μονάδες 8

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\ln 3)$ και $g(\frac{2}{e})$.

Μονάδες 6

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x)=g(\sqrt{e-1})$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f αρκεί να είναι:

$$e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \overset{e>1}{\Leftrightarrow} x>0$$

Άρα

$$A_f=(0,+\infty)$$

Για τη συνάρτηση g αρκεί να είναι:

$$x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$$

$$A_g=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$$

β) Έχουμε:

$$f(x)>0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)>0 \Leftrightarrow \ln(e^x-1)>\ln 1 \overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow} e^x-1>1 \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow \ln e^x>\ln 2 \Leftrightarrow x>\ln 2$$

και

$$g(x)<0 \Leftrightarrow \ln x^2>0 \Leftrightarrow \ln x^2>\ln 1 \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow (x>1 \text{ ή } x<-1)$$

γ) Είναι:

$$f(\ln 3)=\ln(e^{\ln 3}-1)=\ln(3-1)=\ln 2$$

και

$$g\left(\frac{2}{e}\right)=\ln\left(\frac{2}{e}\right)^2=2\ln\left(\frac{2}{e}\right)=2(\ln 2-\ln e)=2(\ln 2-1)=2\ln 2-2$$

Επομένως

$$f(\ln 3)-g\left(\frac{2}{e}\right)=\ln 2-2\ln 2+2=-\ln 2+2=-\ln 2+\ln e^2>0 \text{ οπότε } f(\ln 3)>g\left(\frac{2}{e}\right)$$

δ) Η εξίσωση θα λυθεί στο $A_f=(0,+\infty)$:

$$f(2x)-f(x)=g(\sqrt{e-1}) \Leftrightarrow \ln(e^{2x}-1)-\ln(e^x-1)=\ln\left(\sqrt{e-1}\right)^2 \Leftrightarrow \ln\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=\ln(e-1) \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-1}=e-1 \Leftrightarrow \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1}=e-1 \Leftrightarrow e^x+1=e-1 \Leftrightarrow e^x=e-2 \Leftrightarrow x=\ln(e-2)$$

Όμως

$$e<3 \Rightarrow e-2<1 \Rightarrow \ln(e-2)<0$$

Άρα η εξίσωση είναι ΑΔΥΝΑΤΗ.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$

Μονάδες 7

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Αρκεί να είναι:

$$x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

Άρα

$$A_f=(2,+\infty)$$

β) Έχουμε:

$$100^{\log\sqrt{6}}=(10^2)^{\log 6^{\frac{1}{2}}}=10^{2\frac{1}{2}\log 6}=10^{\log 6}=6$$

γ) Αφού $100^{\log\sqrt{6}}=6$, η εξίσωση, για $x>2$, γίνεται:

$$4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+2=0 \Leftrightarrow 4\cdot(2^2)^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+2=0 \Leftrightarrow 4\cdot(2^{f(x)})^2-9\cdot 2^{f(x)}+2=0$$

Θέτουμε

$$2^{f(x)}=y>0$$

και έχουμε:

$$4y^2-9y+2=0$$

που με διακρίνουσα $(\Delta=49)$ βρίσκουμε ότι

$$y=2 \text{ ή } y=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$$

Επομένως:

- $2^{f(x)}=2 \Leftrightarrow f(x)=1 \Leftrightarrow \log(x-2)=\log 10 \Leftrightarrow x-2=10 \Leftrightarrow x=12$

ή

- $2^{f(x)}=2^{-2} \Leftrightarrow f(x)=-2 \Leftrightarrow \log(x-2)=\log 10^{-2} \Leftrightarrow x-2=\frac{1}{100} \Leftrightarrow x=\frac{201}{100}$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτησης f αρκεί να ισχύει:

$$e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{\ln 2} \Leftrightarrow x > \ln 2$$

(αφού η συνάρτηση $h(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$)

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{A_f = (\ln 2, +\infty)}$$

β) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $f(x) + x = 3\ln 2$ είναι το $(\ln 2, +\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + \ln e^x = \ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) \cdot e^x = \ln 8 \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(\ln 2, +\infty)$)

$$(e^x - 2) \cdot e^x = 8 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2 - 2 \cdot e^x - 8 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\omega = e^x > 0$ (2) και έτσι η (1) μετατρέπεται στην βοηθητική εξίσωση:

$$\omega^2 - 2 \cdot \omega - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$\omega = 4 > 0$ ή $\omega = -2 < 0$ που απορρίπτεται λόγω (2)

Οπότε

$\omega = 4 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$ δεκτή,

καθώς $4 > 2 \Rightarrow \ln 4 > \ln 2$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$)

Συμπέρασμα: η εξίσωσης $f(x) + x = 3\ln 2$ έχει μοναδική λύση, την $\boxed{x = \ln 4}$

γ) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης $f(x) + x \geq 3\ln 2$ είναι το $(\ln 2, +\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) + \ln e^x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow$$

$$\ln(e^x - 2) \cdot e^x \geq \ln 8 \Leftrightarrow$$

$$(e^x - 2) \cdot e^x \geq 8 \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(\ln 2, +\infty)$)

$$\left(e^x\right)^2 - 2 \cdot e^x - 8 \geq 0 \quad (3)$$

Θέτουμε $\omega = e^x > 0$ (4) και έτσι η (3) μετατρέπεται στην βοηθητική ανίσωση:

$$\omega^2 - 2 \cdot \omega - 8 \geq 0 \quad (5)$$

Οι ρίζες του τριωνύμου του πρώτου μέλους της (5) είναι $\omega = -2$ και $\omega = 4$.

Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου στο διάστημα έξω από τις ρίζες του, άρα:

$$(5) \Leftrightarrow \omega \le -2 \text{ ή } \omega \ge 4 \overset{(4)}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega \ge 4 \Leftrightarrow e^x \ge 4 \Leftrightarrow e^x \ge e^{\ln 4} \Leftrightarrow$$

$$x \ge \ln 4$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο , καθώς $e > 1$)

Και επειδή είναι $4 > 2 \Rightarrow \ln 4 > \ln 2$ (αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$) είναι δεκτές όλες οι λύσεις.

Συμπέρασμα: η ανίσωσης $f(x) + x \ge 3\ln 2$ έχει ως λύσεις όλα τα $\boxed{x \in [\ln 4, +\infty)}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\dfrac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

Μονάδες 9

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτησης f αρκεί να ισχύει:

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > 0 \text{ και } 2^x + 5 \ne 0 \text{ (που ισχύει αφού } 2^x > 0 \Rightarrow 2^x + 5 > 5 > 0)$$

$$\overset{2^x+5>0}{\Leftarrow} 4^x - 1 > 0$$

$$\Leftarrow 4^x > 1$$

$$\Leftarrow 4^x > 4^0$$

$$\Leftarrow x > 0$$

(αφού η συνάρτηση $h(x) = 4^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $4 > 1$)

Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$\boxed{A_f = (0, +\infty)}$$

β) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $f(x) = \log 3 - \log 7$ είναι το $(0, +\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .

Έτσι, έχουμε:

$$f(x) = \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow \log\frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \log\frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4^x - 1}{2^x + 5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \log x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, καθώς $10 > 1$)

$$7\left(4^x - 1\right) = 3\left(2^x + 5\right) \Leftrightarrow 7 \cdot 4^x - 7 = 3 \cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow 7 \cdot \left(2^x\right)^2 - 3 \cdot 2^x - 22 = 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\omega = 2^x > 0$ (2) και έτσι η (1) μετατρέπεται στην βοηθητική εξίσωση:

$$7\omega^2 - 3\cdot\omega - 22 = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) έχει διακρίνουσα: $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 7\cdot(-22) = 625 = 25^2 > 0$, οπότε έχει δύο διαφορετικές λύσεις:

$$\left(\omega = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } \omega = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2 > 0 \text{ και } \omega = \frac{-22}{14} < 0 \text{ που απορρίπτεται λόγω (2)}$$

Οπότε

$$\omega = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

(αφού η συνάρτηση $k(x) = 2^x$ είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $2 > 1$)
Η λύση αυτή είναι δεκτή, καθώς $1 > 0$)

Συμπέρασμα: η εξίσωσης $f(x) = \log 3 - \log 7$ έχει μοναδική λύση, την $\boxed{x = 1}$

γ) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης $f(x) > \log 3 - \log 7$ είναι το $(0, +\infty)$ (λόγω της ύπαρξης εκεί της συνάρτησης f .
Έτσι, έχουμε:

$$f(x) > \log 3 - \log 7 \Leftrightarrow$$

$$\log\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4^x - 1}{2^x + 5} > \frac{3}{7} \overset{\cdot 7(2^x+5)>0}{\Leftrightarrow}$$

(αφού η συνάρτηση $\varphi(x) = \log x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, καθώς $10 > 1$)

$$7\left(4^x - 1\right) > 3\left(2^x + 5\right) \Leftrightarrow$$

$$7\cdot 4^x - 7 > 3\cdot 2^x + 15 \Leftrightarrow$$

$$7\cdot\left(2^x\right)^2 - 3\cdot 2^x - 22 > 0 \quad (4)$$

Θέτουμε $\omega = 2^x > 0$ (5) και έτσι η (4) μετατρέπεται στην βοηθητική ανίσωση:

$$7\omega^2 - 3\cdot\omega - 22 > 0 \quad (6)$$

Το τριώνυμο στο πρώτο μέλος της ανίσωσης (6) έχει διακρίνουσα:
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 7\cdot(-22) = 625 = 25^2 > 0$, οπότε έχει δύο διαφορετικές ρίζες:

$$\left(\omega = \frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ και } \omega = \frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right) \Leftrightarrow$$

$$\omega = 2 \text{ και } \omega = \frac{-22}{14} = -\frac{11}{7}$$

Γνωρίζουμε ότι ένα τριώνυμο είναι ομόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου στο διάστημα έξω από τις ρίζες του, άρα:

$$(6) \Leftrightarrow$$

$$\omega \le -\frac{11}{7} \text{ ή } \omega \ge 2 \overset{(5)}{\Leftrightarrow}$$

$$\omega \ge 2 \Leftrightarrow 2^x > 2 \Leftrightarrow 2^x > 2^1 \Leftrightarrow x > 1$$

(αφού η συνάρτηση $k(x) = 2^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, καθώς $2 > 1$)

Και επειδή είναι $1 > 0$ γίνονται δεκτές όλες οι λύσεις.

Συμπέρασμα: η ανίσωσης $f(x) > \log 3 - \log 7$ έχει ως λύσεις όλα τα $\boxed{x \in (1, +\infty)}$

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 5x^3 - 8x^2 + a$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

β) Για $\alpha = -8$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 9

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{(\ln^2 x + 1)^3}{(\ln^2 x + 1)^2} = \dfrac{8}{5}$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Αφού το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε:

$$P(2) = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + \alpha = 0 \Leftrightarrow 40 - 32 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -8$$

β) Για $\alpha = -8$ το πολυώυμο $P(x)$ γίνεται: $P(x) = 5x^3 - 8x^2 - 8$ και επειδή το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$, κάνουμε τη διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ με το σχήμα του Horner.

5	-8	0	-8	$\rho = 2$
	10	4	8	
5	2	4	0	

Οπότε η ταυτότητα της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 2$ είναι:

$$P(x) = (x - 2)(5x^2 + 2x + 4)$$

Άρα η εξίσωση $P(x) = 0$ ισοδύναμα γράφεται:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(5x^2 + 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 = 0 \text{ ή } 5x^2 + 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } 5x^2 + 2x + 4 = 0$$

Η εξίσωση $5x^2+2x+4=0$ είναι αδύνατη γιατί το τριώνυμο $5x^2+2x+4$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=2^2-4\cdot5\cdot4=-76<0$$

Τελικά η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=2$

γ) Η εξίσωση ορίζεται όταν:

$x>0$ και $\left(\ln^2 x+1\right)^2+1\neq0$ που ισχύει για κάθε $x>0$ αφού το $\left(\ln^2 x+1\right)^2+1>1$

Θέτουμε $y=\ln^2 x+1$ και η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{y^3}{y^2+1}=\frac{8}{5}\Leftrightarrow 5y^3=8y^2+8\Leftrightarrow 5y^3-8y^2+8=0$$

Η τελευταία εξίσωση όπως δείξαμε στο β) ερώτημα έχει μοναδική λύση την $y=2$. Άρα θα είναι:

$$\ln^2 x+1=2\Leftrightarrow \ln^2 x=1\Leftrightarrow \ln x=1 \text{ ή } \ln x=-1\Leftrightarrow x=e \text{ ή } x=e^{-1}$$

οι οποίες είναι δεκτές.

ΑΣΚΗΣΗ 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e\cdot x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(2x)<f(x)$.

Μονάδες 7

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\sqrt{3}\cdot\eta\mu x\right)=f(\sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 13

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση πρέπει:

$$e\cdot x+1>0\Leftrightarrow e\cdot x>-1\Leftrightarrow x>-\frac{1}{e}$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο $A=\left(-\frac{1}{e},+\infty\right)$

β) Η δοσμένη ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(2x)<f(x)\Leftrightarrow$$

$$\ln(e\cdot 2x+1)<\ln(e\cdot x+1)\Leftrightarrow$$

$$e\cdot 2x+1<e\cdot x+1\Leftrightarrow$$

$$e\cdot x<0\Leftrightarrow$$

$$x<0$$

και επειδή το $x\in A$ τελικά πρέπει $x\in\left(-\frac{1}{e},0\right)$

γ) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f\left(\sqrt{3}\cdot ημx\right)=f\left(συνx\right)\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e\sqrt{3}\cdot ημx+1\right)=\ln\left(e\cdot συνx+1\right)\Leftrightarrow$$

$$e\sqrt{3}\cdot ημx+1=e\cdot συνx+1\Leftrightarrow$$

$$e\sqrt{3}\cdot ημx=e\cdot συνx\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3}\cdot ημx=συνx\ (1)$$

Επειδή το $συνx\neq 0$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τότε διαιρούμε με $συνx$ και τα δυο μέλη της (1) και έχουμε:

$$\sqrt{3}=\frac{συνx}{ημx}\Leftrightarrow σφx=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=κπ+\frac{\pi}{3}\ ,κ\in\mathbb{Z}$$

Όμως το $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ άρα έχουμε:

$$0\leq x<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$0\leq κπ+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow$$

$$0\leq κ+\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{3}\leq κ<\frac{1}{6}\ ,κ\in\mathbb{Z}$$

Άρα πρέπει $κ=0$ οπότε η λύση της εξίσωσης είναι η $x=\frac{\pi}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2$.

Μονάδες 8

γ) Αν $x>6$ να λύσετε την ανίσωση $f(x)>1$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f θα πρέπει:

$$\begin{cases}3x-11>0\\ x-5>0\\ \ln(x-5)\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x>11\\ x>5\\ x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{11}{3}\\ x>5\\ x\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow x\in(5,6)\cup(6,+\infty)$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=(5,6)\cup(6,+\infty)$

β) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$f(x)=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}=2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3x-11)=2\ln(x-5) \Leftrightarrow$$

$$\ln(3x-11)=\ln(x-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$3x-11=(x-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$3x-11=x^2-10x+25 \Leftrightarrow$$

$$x^2-13x+36=0$$

Το τριώνυμο $x^2-13x+36=0$ έχει $\Delta=(-13)^2-4\cdot 36=25$ και ρίζες τους αριθμούς $x_1=9$ και $x_2=4$. Η λύση $x_2=4$ απορρίπτεται γιατί δεν ανήκει στο σύνολο $A=(5,6)\cup(6,+\infty)$, άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=9$.

γ) Για κάθε $x>6$ η δοσμένη ανίσωση γίνεται:

$$f(x)>1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}>1 \Leftrightarrow$$

Όμως για $x>6$ είναι $x-5>1 \Leftrightarrow \ln(x-5)>0$, άρα κάνοντας απαλοιφή παρονομαστών η παραπάνω ανίσωση γίνεται:

$$\ln(3x-11)>\ln(x-5) \Leftrightarrow$$

$$3x-11>x-5 \Leftrightarrow$$

$$2x>6 \Leftrightarrow$$

$$x>3$$

Όμως είναι $x>6$ άρα η ανίσωση έχει λύσεις κάθε $x>6$.

ΑΣΚΗΣΗ 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)=3ln2$

Μονάδες 10

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x)+f(e^x-2)\le 3ln2$.

Μονάδες 10

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει:

$$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=(1,+\infty)$

β) Για κάθε $x>1$ η δοσμένη εξίσωση γίνεται:

$$f(e^x)+f(e^x-2)=3ln2 \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^x-1\right)+\ln\left(e^x-3\right)=ln2^3 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left[\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\right]=ln8 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)=8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-3e^x-e^x+3=8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-4e^x-5=0 \Leftrightarrow$$

Θέτουμε $y=e^x$ με $y>0$ και η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$y^2-4y-5=0$$

Το τριώνυμο y^2-4y-5 έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot 5=36$ και ρίζες τους αριθμούς $y_1=5$ και $y_2=-1$. Η λύση $y_2=-1$ απορρίπτεται γιατί $y>0$. Άρα:

$$y=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow x=ln5$$

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=ln5$ η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο σύνολο $(1,+\infty)$.

γ) Για κάθε $x>1$ η δοσμένη ανίσωση γίνεται:

$$f\left(e^x\right)+f\left(e^x-2\right)\le 3ln2 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(e^x-1\right)+\ln\left(e^x-3\right)\le ln2^3 \Leftrightarrow$$
$$\ln\left[\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\right]\le ln8 \Leftrightarrow$$
$$\left(e^x-1\right)\left(e^x-3\right)\le 8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-3e^x-e^x+3\le 8 \Leftrightarrow$$
$$e^{2x}-4e^x-5\le 0 \Leftrightarrow$$
$$y^2-4y-5\le 0$$

Με $y=e^x>0$.Δουλεύοντας όπως και στο προηγούμενο ερώτημα το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες το 5 και το -1, άρα παραγοντοποιείται ως εξής:

$$(y-5)(y+1)\le 0$$

Και επειδή το $y+1>0$ θα πρέπει να είναι και:

$$y-5\le 0 \Leftrightarrow y\le 5 \Leftrightarrow e^x\le 5 \Leftrightarrow x\le ln5$$

Όμως πρέπει και $x>1$ άρα τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι $x\in(1,ln5]$